УДК 622.274

А.Ю. Агабалян
канд. техн. наук
ООО «Геосервис»[1]
заместитель директора по научной работе
geoservice.arm@mail.ru

Математическое обоснование зависимостей технологических показателей обогащения от качества исходной руды

[1]Республика Армения, Ереван–0010, ул. Комитаса, 9, IV этаж.

Методами математической статистики и дифференциального исчисления проведен совместный анализ известных эмпирических зависимостей содержания металла в хвостах обогащения от его содержания в исходной руде. Подтверждена обоснованность применения прямолинейной зависимости в границах доверительного интервала. Получены формулы расчета параметров регрессии прямолинейного уравнения, используемых в формулах определения величины натуральных лимитов содержаний и учитывающих изменчивость величины извлечения в зависимости от содержания металла в исходной руде. Практическая ценность разработанного метода заключается в создании инструмента нахождения математически обоснованной функции приближения при малом количестве технологических испытаний обогатимости руд или малом разбросе исходных фактических данных действующих ГОКов

Ключевые слова: лимиты содержаний; обогащение руд; корреляционная зависимость; параметры регрессии; извлечение; содержание в хвостах обогащения; математическая статистика; дифференциальное исчисление

Основным инструментом для подсчета запасов и промышленной оценки (переоценки) рудных месторождений являются параметры кондиций, объективное технико-экономическое обоснование которых имеет исключительно важное значение. Например, по бортовому содержанию полезного компонента в руде оконтуривается рудное тело по мощности, от которой зависит величина запасов руды в данном подсчетном блоке и минимальное промышленное содержание в нем.

Параметры кондиций учитывают экономические и качественно-количественные по-

№ пробы	1	2	3	4	5
α, %	8,79	16,00	18,90	28,00	32,30
θ, %	5,02	6,97	7,20	8,44	9,13
№ пробы	**6**	**7**	**8**	**9**	
α, %	33,90	44,50	54,90	56,60	
θ, %	10,35	11,65	12,28	13,34	

Таблица 1.
Результаты технологических исследований обогатимости железной руды Абовянского железорудного месторождения

казатели горно-обогатительного производства и рассчитываются на основе принципа равенства извлекаемой ценности руды с искомым лимитом содержания и его стоимостного выражения.

К основным качественно-количественным показателям обогащения руд относятся выход концентрата (γ, доли ед.), извлечение металла в концентрат (ε, доли ед.), содержание металла в хвостах обогащения (θ, %, г/т) и в концентрате (β, %, г/т). В соответствии с балансом металла выход концентрата определяется аналитически в виде функциональной зависимости (1), а извлечение металла в концентрат – зависимостью (2):

$$\gamma = \frac{\alpha - \theta}{\beta - \theta}, \qquad (1)$$

где α – содержание металла в обогащаемой руде, % (г/т),

$$\varepsilon = \frac{\beta\gamma}{\alpha}\ . \qquad (2)$$

В формулах (1) и (2) все показатели обогащения зависят от содержания полезного компонента в исходной руде α. Числовые значения β и θ необходимо определять технологическими исследованиями обогатимости руд при разных содержаниях в них полезных компонентов. При этом хорошо известна закономерность, при которой с ростом содержания полезного компонента в обогащаемой однотипной руде (α) возрастает извлечение ε, а также содержание в хвостах обогащения θ и выход концентрата γ.

В монографии [1] отмечается, что это не учитывается ни в одной из методик определения натуральных значений лимитов содержаний.

Методы исследования

Для решения данной задачи наиболее удобно использовать зависимость содержания полезного компонента в хвостах обогащения от его содержания в исходной руде, т.е. θ = f(α). Ввиду отсутствия аналитической зависимости, искомая зависимость может быть получена только математической обработкой эмпирических данных с целью получения корреляционной зависимости функции приближения.

Для нахождения аппроксимирующей функции вначале нужно подобрать вид зависимости наинизшей степени и уже после этого определять численные значения параметров [2].

Наинизшей степенью искомой зависимости, естественно, является прямолинейная функция, которая впервые была предложена в монографии [3]:

$$\theta = a\alpha + b, \qquad (3)$$

где a и b – численные параметры.

В указанной монографии зависимость (3) обоснована высокой сходимостью расчетных показателей и фактических данных ***(табл. 1)*** Абовянского железорудного месторождения (Республика Армения).

Ситуация намного осложняется при попытке определения параметров зависимости (3) на действующих горно-обогатительных комбинатах при переоценке их запасов.

Проиллюстрируем это на анализе среднегодовых данных ***(табл. 2)*** 11-летней работы Агаракского медно-молибденового комбината (АММК, Республика Армения).

Параметры a и b рассчитываются в программе *Excel* (линия тренда) или формулами линейной аппроксимации данных статистического анализа. Однако до определения искомых параметров этим способом необходимо провести корреляционный анализ данных, основная задача которого – установление характера и тесноты связи между результативными (зависимыми) и факторными (независимыми) показателями [4].

Сводные результаты корреляционного анализа по обоим месторождениям приведены в ***табл. 3*** (по АММК приведен анализ по меди, т.к по молибдену анализ аналогичен).

Таким образом, для Абовянского месторождения выявлена сильная корреляционная зависимость (коэффициент корреляции близок к 1) и уравнение регрессии (3) примет следующий вид:

$$\theta = 0{,}161\alpha + 4{,}10. \qquad (4)$$

В случае Агаракского комбината связь между величинами не выявлена, т.к. получен коэффициент корреляции, близкий к нулю. Это обусловлено мизерным разбросом исходных данных от среднего значения, т.е. имеется

№	Годы	α_{Cu}, %	Θ_{Cu}, %	α_{Mo}, %	Θ_{Mo}, %
1	2004	0,294	0,0964	0,021	0,007
2	2005	0,290	0,1023	0,019	0,007
3	2006	0,300	0,0923	0,019	0,006
4	2007	0,283	0,0855	0,020	0,006
5	2008	0,299	0,0978	0,020	0,007
6	2009	0,337	0,0952	0,014	0,005
7	2010	0,326	0,0972	0,014	0,005
8	2011	0,316	0,0985	0,017	0,006
9	2012	0,317	0,0898	0,018	0,006
10	2013	0,327	0,0917	0,016	0,005
11	2014	0,315	0,0875	0,018	0,006
Средние значения		0,309	0,0940	0,018	0,006

Таблица 2.
Среднегодовые данные по качеству перерабатываемой руды и хвостам обогащения Агаракского медно-молибденового комбината

чрезвычайно большая скученность наблюдаемых показателей, что абсолютно естественно, т.к основным условием эффективной работы обогатительной фабрики является качественная однородность поступающей на фабрику руды. Для достижения этой цели добываемая руда усредняется для переработки на специальных складах.

Для решения проблемы рассмотрим возможность применения нелинейной аппроксимации данных. В практике обогащения довольно редко используется также другой вид эмпирической зависимости искомых показателей:

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \qquad (5)$$

где θ_1, θ_2 – содержание металла в 1 и 2 пробах хвостов обогащения, соответственно, % (г/т); α_1, α_2 – содержание металла в 1 и 2 пробах исходной руды, соответственно, % (г/т).

На том же примере Абовянского месторождения рассмотрим это соотношение и проведем совместный анализ зависимости (3) и соотношения (5).

Вначале проверим, насколько левая часть соотношения (5) соответствует правой и, для общего представления, ограничимся последовательными 8 результатами (всего число парных сочетаний из 9 равно 36, C_9^2=36) Результаты проверки сведены в ***табл. 4*** и свидетельствуют о том, что эмпирическое соотношение (5) характеризует процесс обогащения руды с погрешностью около 10% (включая систематические и случайные ошибки аналитической лаборатории и отбора проб).

Тем не менее, соотношение (5) удобно тем, что если имеются достоверные значения технологических испытаний (многократно проверенных) хотя бы для одной пробы или средневзвешенные результаты многолетней работы действующего горно-обогатительного комбината (примем их за фактические и обо-

Таблица 3.
Результаты корреляционного анализа по данным Абовянского железорудного и Агаракского медно-молибденового месторождений

Показатели	α_{Fe}, %	θ_{Fe}, %	α_{Cu}, %	Θ_{Cu}, %
Среднее значение	32,65	9,38	0,309	0,094
Дисперсия	283,50	7,59	0,00029	0,000026
Среднее квадратичное отклонение	16,84	2,75	0,017	0,005
Корреляционный момент	45,76		0,0000003	
Коэффициент корреляции	0,987		0,0037	
Параметры	a = 0,161	b = 4,10	–	–

№	α, %	Θ, %	θ_i / θ_{i+1}	$\sqrt{\sqrt{\alpha_i / \alpha_{i+1}}}$	Относительное отклонение, %
1	8,79	5,02	0,72	0,74	–2,70
2	16,00	6,97	0,97	0,92	5,43
3	18,90	7,20	0,85	0,82	3,66
4	28,00	8,44	0,92	0,93	–1,08
5	32,30	9,13	0,88	0,98	–10,20
6	33,90	10,35	0,89	0,87	2,30
7	44,50	11,65	0,95	0,90	5,56
8	54,90	12,28	0,92	0,98	–6,12
9	56,60	13,34			

Таблица 4.
Расчет величины относительного отклонения

значим $\alpha_ф$ и $\theta_ф$, то можно рассчитать содержание полезного компонента в хвостах обогащения для любого прогнозируемого содержания в исходной руде по формуле:

$$\theta = \frac{\theta_D}{\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\alpha}. \qquad (6)$$

Результаты исследования

Осознавая, что содержание металла α в исходной руде является независимой переменной (аргументом), а искомое содержание в хвостах θ – зависимой (функцией), тем не менее, для упрощения дальнейших выкладок представим функцию (6) в обратном виде:

$$\alpha = c\theta^2, \qquad (7)$$

где с – постоянное числовое значение, полученное для данной обогатительной фабрики:

$$c = \frac{\alpha_D}{\theta_D^2}. \qquad (8)$$

Представим функцию (3) также в сопоставимом обратном виде:

$$\alpha = A\theta - B, \qquad (9)$$

где

$$A = \frac{1}{a}; \qquad (10)$$

$$B = \frac{b}{a}. \qquad (11)$$

Учитывая, что графики уравнений (3) и (6) симметричны графикам уравнений (7) и (9) относительно прямой θ=α (α=θ), считаем, что дальнейший анализ графиков приемлем для обеих пар симметричных функций.

Полученная зависимость (7) является квадратичной функцией, а функция (9) – прямолинейной. Теоретически, если кривая (в данном случае – парабола) и прямая на каком-то исследуемом интервале данных довольно близко описывают полученные эмпирические данные, то с математической точки зрения прямую (9) можно представить в виде касательной к параболе (7) в точке $M_0(\theta_o; \alpha_o)$, значение кривизны которой близко к нулю и практически незначительно отличается от прямой на данном интервале.

Уравнение касательной к кривой в точке $M_o(\theta_o;\alpha_o)$ определяется по формуле [2]:

$$\alpha = \alpha'(\theta_o)(\theta - \theta_o) + \alpha(\theta_o). \qquad (12)$$

где $\alpha'(\theta_o)$ – первая производная функции (7):

$$\alpha'(\theta_o) = 2c\theta_o. \qquad (13)$$

С учетом значения производной (13), уравнение (12) примет следующий вид:

$$\alpha = 2c\theta_o\theta - 2c\theta_o^2 + \alpha_o, \qquad (14)$$

или, подставив значение с из (8) в точке касания M_o ($\alpha_ф=\alpha_o$; $\theta_ф=\theta_o$), получим уравнение вида (9), где

$$A = \frac{2\alpha_o}{\theta_o}; \qquad (15)$$

$$B = \alpha_o. \qquad (16)$$

Тогда, с учетом формул (10) и (11), параметры a и b исходного уравнения (3) будут определяться следующими соотношениями:

$$a = \frac{\theta_o}{2\alpha_o}, \qquad (17)$$

$$b = \frac{\theta_o}{2}. \qquad (18)$$

Из формулы (18) получим значение θ_o:

$$\theta_o = 2b, \qquad (19)$$

а из сопоставления формул (11) и (16) содержание в исходной руде α_o в точке Мо:

$$\alpha_o = \frac{b}{a}. \qquad (20)$$

Подставив полученные значения из формул (19) и (20) в (8), получим:

$$c = \frac{1}{4ab} \qquad (21)$$

Исходное параболическое уравнение (6) с учетом подстановки (8) будет иметь вид:

$$\theta = \sqrt{\frac{\alpha}{c}}, \qquad (22)$$

Подставив значение с из формулы (21) в уравнение (22), получим параболическое

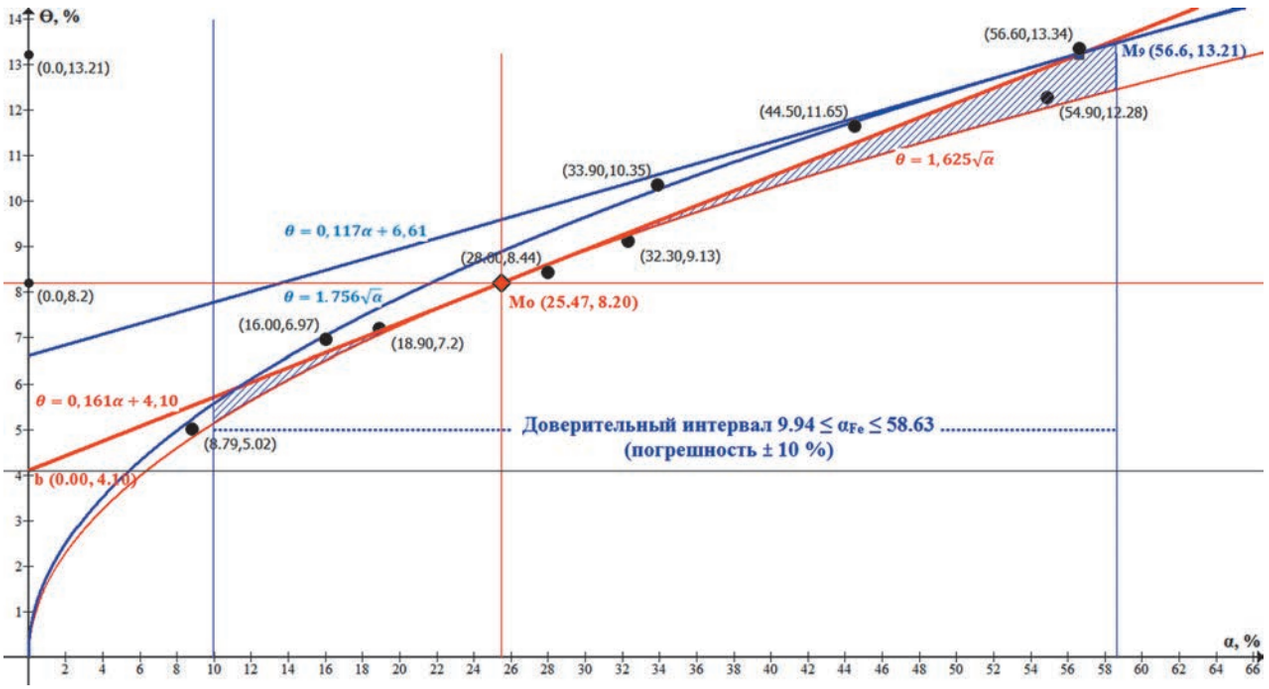

Рис. 1.
Корреляционное поле исходных данных по содержаниям железа и графики параболических функций и касательных к ним в точках M_0 и M_9

уравнение (6), выраженное через искомые параметры прямолинейного уравнения регрессии a и b:

$$\theta = 2\sqrt{ab\alpha}. \qquad (23)$$

Таким образом, график уравнения (3) является касательной к графику параболы (23) с точкой касания M_0 (α_o;θ_o) координаты которой определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} \theta = a\alpha + b \\ \theta = 2\sqrt{ab}\sqrt{\alpha} \end{cases}. \qquad (24)$$

Теперь по формулам (19) и (20) можно рассчитать, какая «опорная» точка уравнения прямой (11) стала точкой касания прямой и параболы: θ_o=8,20; α_o=25,47.

Таким образом, функция θ=0,161α+4,10 является касательной к параболе $\theta = 1{,}625\sqrt{\alpha}$ в точке M_o(25,47; 8,20). На ***рис. 1*** эта пара графиков показана красным цветом. Для сравнения синим цветом показана также касательная θ=0,117α+6,61 к параболе $\theta = 1.756\sqrt{\alpha}$ в точке M_9(56,6; 13,21).

Проанализируем полученные результаты с двух точек зрения: математической и практической.

С математической точки зрения, представление уравнения регрессии (3) в виде касательной к параболе (23) предопределяет изменение параметров прямолинейного уравнения при изменении координат точки касания M_o. В то же время, полученное уравнение параболы (23) зависит от тех же параметров касательной a и b, т.е. меняется также и уравнение параболы. Это означает, что система (24) графически отражает семейство парабол с семейством касательных к ним.

Кстати, рассмотрение прямолинейного уравнения в «статусе» касательной и изменчивость параметров a и b объясняет также само наличие свободного параметра b прямолинейного корреляционного уравнения, т.к. при функциональной зависимости очевидно, что при «нулевом» содержании металла в исходной руде содержание в хвостах обогащения также не может отличаться от «нулевого». При стремлении точки касания M_o(θ_o;α_o) к началу координат O(0; 0) положение касательной стремится к оси ординат: $\alpha \to 0$; $b \to 0$; $a = tg\varphi \to tg90^o \to \infty$ (φ – угол наклона касательной), а уравнение касательной, проведенной к вершине параболы, приобретает вид α = 0,

С практической точки зрения намного удобнее пользоваться одним уравнением (3), принимая параметры a и b постоянными для определенного доверительного интервала аргумента.

Для определения величины доверительного интервала аргумента (α) с заданной допустимой погрешностью функции (θ) проведем анализ графиков прямой и параболы. Очевидно, что общая точка – точка касания обеих эмпирических зависимостей имеет ми-

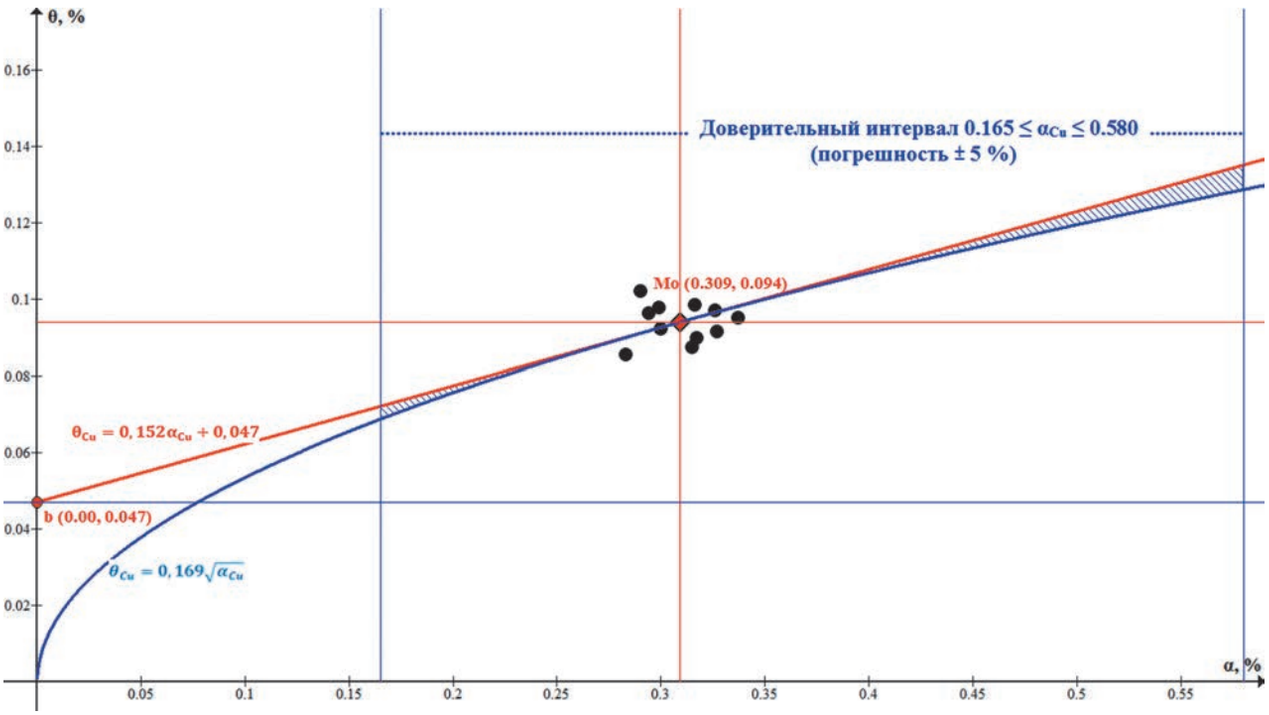

Рис. 2.
Фактические данные по содержаниям меди и графики прямолинейной и параболической аппроксимирующих функций

нимальную (нулевую) погрешность, которая возрастает по мере отдаления от этой точки. Следовательно, область погрешности можно представить в виде области, заключенной между двумя графиками.

Учитывая, что значения касательной к выпуклой кривой всегда выше значений кривой или равны (в точках касания), то аналитически указанное условие будет иметь следующий вид:

$$\frac{a\alpha + b}{\sqrt{4ab\alpha}} \le 1 + P, \qquad (25)$$

где P – заданное значение допустимой погрешности, доли ед.

Например, определим доверительный интервал с погрешностью, равной исходной погрешности соотношения (5), т.е. до 10%. В этом случае, в правую часть соотношения (25) подставим 1,1 и после преобразований получим квадратное неравенство:

$$a^2\alpha^2 - 2{,}84ab\alpha + b^2 \le 0, \qquad (26)$$

решив которое, получим интервал значений:

$$\alpha_1 \ge 0{,}41\frac{b}{a} = 9{,}94; \alpha_2 \le 2{,}43\frac{b}{a} = 58{,}63. \qquad (27)$$

Таким образом, доверительный интервал аргумента будет иметь вид: 9,94≤α≤58,63, при котором значения прямолинейной и параболической функции отличаются не более чем на 10%. На ***рис. 1*** область допустимой погрешности представлена синей штриховкой. В область допустимой погрешности войдет также и симметричная область над касательной. Аналогично, можно рассчитать доверительный интервал с погрешностью не более 5% , который будет иметь вид: 13,56≤α≤47,82

Оценка погрешностей обеих аппроксимирущих функций на всем диапазоне исходных данных по сравнению с фактическими данными показывает, что прямолинейная зависимость намного ближе (сумма наименьших квадратов почти вдвое меньше – 1,6 и 3,1) описывает фактическую зависимость θ от α.

Вернемся теперь к данным ***табл. 3***, корреляционный анализ которых не выявил искомой зависимости между показателями. Выходом из сложившейся ситуации может стать метод определения параметров аппроксимирущей прямой, изложенный выше. Фактические данные имеют настолько незначительный разброс, что могут быть заменены средними значениями ($\alpha_{ср}$; $\theta_{ср}$) соответствующих содержаний металлов из ***табл. 2***, которые и будут точками касаний прямой и параболы, т.е.: $\alpha_ф = \alpha_{ср} = \alpha_о$ и $\theta_ф = \theta_{ср} = \theta_о$. По формулам (17) и (18) определим параметры a и b для уравнений соответствующих металлов:

$$a_{Cu} = \frac{\theta_{Cu}}{2\alpha_{Cu}} = 0{,}152; b_{Cu} = \frac{\theta_{Cu}}{2} = 0{,}047; \qquad (28)$$

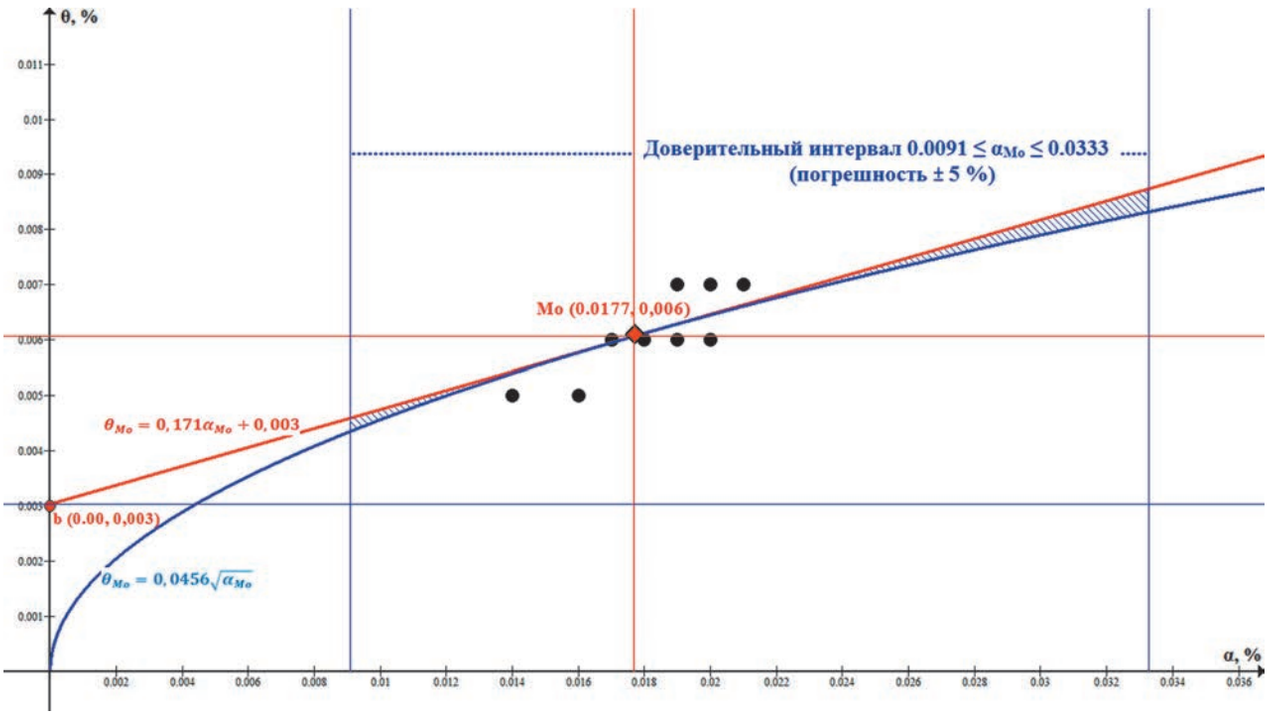

Рис. 3.
Фактические данные по содержаниям молибдена и графики прямолинейной и параболической аппроксимирующих функций

$$a_{Mo} = \frac{\theta_{Mo}}{2\alpha_{Mo}} = 0{,}171; b_{Mo} = \frac{\theta_{Mo}}{2} = 0{,}003. \quad (29)$$

Следовательно, аппроксимирующим прямолинейным уравнением по меди будет:

$$\theta_{Cu} = 0{,}152\alpha_{Cu} + 0{,}047, \quad (30)$$

а по молибдену:

$$\theta_{Mo} = 0{,}171\alpha_{Mo} + 0{,}003. \quad (31)$$

Соответственно, уравнение параболы (23), к которой проведена касательная (30), будет иметь вид:

$$\theta_{Cu} = 0{,}169\sqrt{\alpha_{Cu}}, \quad (32)$$

а параболы, к которой проведена касательная (31), будет иметь вид:

$$\theta_{Mo} = 0{,}0456\sqrt{\alpha_{Mo}}. \quad (33)$$

Подставив значения рассчитанных параметров в соотношение (25), при допустимой погрешности ≤ 5% получим доверительный интервал по меди: $0{,}165 \le \alpha_{Cu} \le 0{,}580$ (заштрихованная область на ***рис. 2***) или выраженный через значение аргумента в точке касания: $0{,}53\alpha_o \le \alpha \le 1{,}88\alpha_o$.

Доверительный интервал по молибдену рассчитывается аналогично и имеет вид: $0{,}0091 \le \alpha_{Mo} \le 0{,}0{,}0333$ (заштрихованная область на ***рис. 3***).

Выводы

Совместный анализ двух известных эмпирических зависимостей содержания в хвостах обогащения от содержания в исходной руде, позволил доказать более близкую аппроксимацию прямолинейной функции приближения по сравнению с параболической. Также доказано, что с математической точки зрения прямолинейное уравнение регрессии является касательной к параболическому уравнению в некоторой «опорной» точке с минимальной (нулевой) погрешностью. При представлении прямой в виде касательной и изменении точки касания меняются не только параметры a и b, т.е. само уравнение касательной, но и и уравнение параболы, что в совокупности означает семейство касательных и семейство соответствующих парабол в каждой отдельной точке касания. С практической точки зрения параметры a и b можно принять постоянными на определенном доверительном интервале с заданной погрешностью. Относительная ширина доверительного интервала, выраженная через фактическое значение аргумента $\alpha_ф$ в точке касания α_o ($\alpha_ф = \alpha_o$) при допустимой погрешности ±10%: $0{,}41\alpha_o \le \alpha \le 2{,}43\alpha_o$, а при допустимой погрешности ±5%: $0{,}53\alpha_o \le \alpha \le 1{,}88\alpha_o$. Очевидно, что чем больше значение аргумента, тем больше будет абсолютная величина доверительного интервала,

т.к график параболы отдаляющийся от своей вершины все меньше отличается от прямой, т.е. от графика своей касательной.

Полученный большой диапазон позволяет с высокой степенью вероятности предположить попадание в данный интервал прогнозируемых содержаний металла в обогащаемой руде.

Практическая ценность разработанного метода определения параметров регрессии прямолинейного уравнения заключается в математической обоснованности их значений при малом количестве технологических испытаний обогатимости руд или малом разбросе исходных фактических данных действующих ГОКов. В этом случае фактические данные можно свести к точке их среднего значения (точка минимальной погрешности) и параметры регрессии уравнения (3) рассчитать по формулам (17) и (18). Если же исходные данные представлены широким диапазоном, с коэффициентом корреляции близким к 1, то параметры a и b рассчитываются методами математической статистики. Далее по формулам (18) и (19) рассчитываются значения аргумента и функции с минимальной погрешностью. В обоих случаях определяется доверительный интервал, т.е. область применения уравнения (3) с уже определенными численными параметрами, на основе решения неравенства вида (25).

В результате применения предложенного метода систематические и случайные ошибки результатов технологических испытаний обогатимости руд широкого диапазона качества нивелируются аппроксимирующей зависимостью, а малый разброс фактических данных действующих предприятий компенсируется их высокой надежностью, многократно откорректированных разными лабораториями производителя и потребителя концентрата, а также независимыми арбитражными лабораториями.

Литература

1. Агабалян Ю.А. Общая теория оптимального освоения недр (твердые полезные ископаемые). Saarbrucken: Palmarium Academic Publishing. 2015. 288 с.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2001. Т. 1. 616 с.
3. Агабалян Ю.А. Теория и практика оптимального освоения недр. М.: Недра. 1994. 176 с.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука. 1974. 832 с.

UDC 622.274

A.Yu. Aghabalyan, PhD, Deputy Director for Science of LLC "Geoservice"[1], geoservice.arm@mail.ru
[1]Республика Армения, Ереван–0010, ул. Комитаса, 9, IV этаж.

Mathematical justification dependencies technological indicators of ore dressing on the quality of processed ore

Abstract. A combined analysis of the known empirical dependences between the ore grades in the tailings and in the processed ore has been carried out using the methods of mathematical statistics and differential calculus. The reasonableness of using the straight–line dependency within the bounds of the confidence interval has been confirmed. The formulas of calculation of a straight–line equation's regression parameters, which are used in formulas to define the value of the natural limits of ore grade and take into account the variability of the extraction value depending on ore grade in the initial ore, have been determined. The practical value of the developed method is to create a tool to find a mathematically sound function approximation with a small number of technological tests on concentration of ores or the slight scatter of the actual source data of the existing mines.

Keywords: limits of ore grades; ore–dressing; cross–correlation dependence; parameters of regression; extraction; tails of ore–dressing; mathematical statistics; differential calculus.

References

1. Aghabalyan Yu.A. *Obshchaia teoriia optimal'nogo osvoeniia nedr (tverdye poleznye iskopaemye)* [The general theory of optimal exploitation of mineral resources (hard minerals)]. Saarbrucken: Palmarium Academic Publ., 2015, 288 p.
2. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniia* [Differential and integral calculus], 3 vols., Moscow, FIZMATLIT Publ., 2001, vol. 1, 616 p.
3. Aghabalyan Yu.A. *Teoriia i praktika optimal'nogo osvoeniia nedr* [Theory and practice of the optimal exploitation of mineral resources]. Moscow, Nedra Publ., 1994, 176 p.
4. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Mathematical Handbook for Scientists and Engineers]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 832 p.