



**Поликова И.Н.**  
Доцент, Кандидат технических наук по специальности «Гидрогеология»  
Член Международной Ассоциации Гидрогеологов  
z\_irpol1@mail.ru



**Ахметшин Р.З.**  
кандидат физ.-мат. наук  
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Научный сотрудник  
axmetro@yandex.ru



**Саевец Т.Н.**  
Средне-Волжское территориальное отделение ФГКУ «Росгеолэкспертиза»  
заместитель начальника отделения  
tatianasaevets@yandex.ru

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ НА ПРИМЕРЕ НЕФТЕНОСНОГО БАССЕЙНА ПЕРМСКОГО ПРЕДУРАЛЬЯ

*Основная трудность при создании модели фильтрации неоднородной жидкости связана со сложным видом основного уравнения, описывающего этот процесс. Необходимо принимать во внимание не только свойства жидкости, обуславливающие ее неоднородность, но и глубину залегания с учетом формы поверхностей моделируемых горизонтов. Такая постановка задачи позволяет воспроизвести непотенциальный характер течения, и при визуализации процесса в качестве результата моделирования получить не только искомую функцию давления, а также направление и величину латеральных и вертикальных скоростей. Проводится сопоставление моделируемых давлений с решением задачи фильтрации в классической постановке. Математические модели фильтрации неоднородных жидкостей на базе системы программного обеспечения «АкваСофт» позволяют использовать широкие возможности для математического эксперимента и значительно увеличивает информационную емкость, необходимую при изучении реальных процессов по сравнению общепринятой практикой построения геологических карт.*

**Ключевые слова:** математическая модель фильтрации, неоднородная жидкость, глубокие горизонты.

Классические уравнения динамики подземных вод, на основании которых разработана методика моделирования геофильтрации напорно-безнапорного потока подземных вод, справедливы только для верхней зоны активного водообмена. Особенностью динамики процесса фильтрации однородных подземных вод является потенциальный характер течения, когда в соответствии с законом Дарси скорость потока пропорциональна градиенту функции напора:

$$v = k \frac{\partial H}{\partial l}$$

Соответствующие плановые и вертикальные скорости фильтрации находятся в диапазоне (0,001÷50) м/сут.

Для более высоких скоростей необходимо использовать уравнения гидравлики, а для более низких значений, приуроченных к глубоким горизонтам бассейнов подземных вод, имеет место «гравитационный режим течения», по терминологии нефтяной гидрогеологии [1], [2].

Подавляющая часть нефтегазоносных месторождений, а также значительная доля минеральных и термальных вод связаны с глубокими горизонтами артезианских бассейнов. Кроме того, они также используются в качестве коллекторов для захоронения промышленных отходов.

Изучение динамики потока подземных вод в глубоких горизонтах требует усложнения постановки задачи, обусловленной влиянием минерализации, температуры и давления на плотность и вязкость жидкости.

Расчеты динамики подземных вод, плотность и вязкость которых зависят от их давления, химического состава и температуры, основываются на обобщенном законе Дарси для объемной скорости фильтрации [1]:

$$V_L = -\frac{K_L}{\eta} \left( \frac{\partial P}{\partial L} - \rho g \right) \quad (1)$$

где  $V_L$  – составляющая объемной скорости фильтрации в направлении  $L$ ,

$K_L$  – коэффициент проницаемости пород в направлении  $L$ ,

$\eta$  – динамическая вязкость подземных вод,  
 $P$  – давление в пределах мощности горизонта,  
 $\rho$  – плотность подземных вод,  
 $g$  – ускорение свободного падения.

Неоднородность подземных вод по плотности и вязкости оказывает существенное влияние на условия формирования потоков в глубоких горизонтах, и только учет всей сложности постановки задачи может дать относительно реальное представление об исследуемом процессе.

### Математическое описание стационарного процесса фильтрации неоднородной жидкости

Для описания процесса фильтрации неоднородных подземных вод в многопластовой системе по расчетной схеме водоносных горизонтов, разделенных слабопроницаемыми слоями, вводится квазиортогональная система координат  $X_n OY_n$ , которая формируется путем проецирования ортогональной системы координат  $XOY$  на «срединную» поверхность  $Z_n$ , расположенную внутри толщи рассматриваемого горизонта:

$$Z_n = \frac{Z_m + Z_{bn}}{2}$$

где  $Z_{tn}$  – высота кровли горизонта  $n$ ,

$Z_{bn}$  – высота подошвы горизонта  $n$ .

Для моделирования планово-вертикальной фильтрации в реальной системе трехмерных потоков подземных вод принимается приближение, когда в водоносном горизонте рассматривается только плановая фильтрация, в разделяющем слабопроницаемом слое – только вертикальная.

Процесс напорной стационарной геофильтрации неоднородных подземных вод в многопластовой системе в рассмотренной выше системе координат описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, которая в простейшем случае имеет вид [3]: (2)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \frac{k_{xn} M_n \rho_n}{\eta_n} \left( \frac{\partial P_n}{\partial x_n} - \rho_n g \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y_n} \left( \frac{k_{yn} M_n \rho_n}{\eta_n} \left( \frac{\partial P_n}{\partial y_n} - \rho_n g \right) \right) + \\ & + \frac{k_{zn} \rho_{zn}}{\eta_{zn} m_{zn}} (P_{n+1} - P_n - \rho_{zn} g m_{zn}) + \frac{k_{zn-1} \rho_{zn-1}}{\eta_{zn-1} m_{zn-1}} (P_{n-1} - P_n - \rho_{zn-1} g m_{zn-1}) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

где  $x_n, y_n$  – координаты точки области на поверхности  $Z_n$ ;

$P_n$  – искомое давление подземных вод в горизонте;

$\rho_n$  – искомая или известная плотность подземных вод в горизонте;

$k_{xn}$  – проницаемость горизонта в направлении оси  $OX_n$ ;

$k_{yn}$  – проницаемость горизонта в направлении оси  $OY_n$ ;

$m_n$  – мощность водоносного горизонта;

$g$  – ускорение свободного падения;

$\rho_{zn}, \rho_{zn-1}$  – плотность подземных вод в разделяющем слое;

$k_{zn}, k_{zn-1}$  – вертикальная проницаемость разделяющего слоя;

$\eta_{zn}, \eta_{zn-1}$  – динамическая вязкость подземных вод в разделяющем слое;

$m_{zn}, m_{zn-1}$  – мощность слабопроницаемого разделяющего слоя.

Дискретизация моделируемой области на элементарные блоки необходима для численного решения уравнения методом конечных разностей. Алгоритм методики предполагает усреднение параметров в пределах каждого блока.

Кроме того, для реализации алгоритма численного решения уравнения (2) принимается приближение о линейном изменении величины параметров в пределах мощности разделяющего слоя от значений на подошве вышележащего горизонта до значений на кровле нижележащего горизонта, и для разделяющих слабопроницаемых слоев принимаются среднеарифметические значения всех параметров. Все усредненные параметры, а также начальные и граничные условия при создании конечно-разностной схемы локализуются в узловых точках слоя сеточной области с целочисленными координатами (i,j,n) вдоль осей (X,Y,Z).

Алгоритм численного решения задачи фильтрации неоднородной жидкости, впервые описанный в диссертации [4], использует аналитическое уравнение зависимости плотности жидкости от давления, минерализации и температуры [5]:

$$\rho = \rho_0(1 - \rho_T(T - T_0) + \rho_C(C - C_0)) \exp(\rho_P(P - P_0)) \quad (4)$$

$\rho$  – плотность подземных вод при температуре T, минерализации C и давлении P,

$\rho_0$  – плотность подземных вод при температуре T<sub>0</sub>, минерализации C<sub>0</sub> и давлении P<sub>0</sub>,

$\rho_T, \rho_C, \rho_P$  – известные коэффициенты уравнений состояния.

Температура рассчитывалась по эмпирической формуле

$$T^0 = 4,6 + 0,143 (H_n^{surf} - H_n^{top})$$

$H_n^{surf}$  – абсолютная отметка дневной поверхности,  $H_n^{top}$  – абсолютная отметка кровли горизонта n.

$P_n(x,y,z)$  – искомая функция описываемого процесса не является потенциальной функцией, градиент которой равен скорости фильтрации, поэтому результатом каждого варианта моделирования процесса стационарной фильтрации неоднородной жидкости является не только поле давлений, но и поле плановых и вертикальных скоростей потока для каждого слоя моделируемой области:

$$\begin{aligned} V_{xn}(x,y,z) &= \frac{\kappa_{xn}(x,y,z)}{\eta_n(x,y,z)} \left( \frac{P_n(x+\Delta x,y,z) - P_n(x,y,z)}{\Delta x} - \rho_n(x,y,z)g \frac{(Z_n(x+\Delta x,y,z) - Z_n(x,y,z))}{\Delta x} \right) \\ V_{yn}(x,y,z) &= \frac{\kappa_{yn}(x,y,z)}{\eta_n(x,y,z)} \left( \frac{P_n(x,y+\Delta y,z) - P_n(x,y,z)}{\Delta y} - \rho_n(x,y,z)g \frac{(Z_n(x,y+\Delta y,z) - Z_n(x,y,z))}{\Delta y} \right); \\ V_{zn}(x,y,z) &= \frac{\kappa_z(x,y,z)}{\eta_{zn}(x,y,z)m'_n(x,y,z)} (P_{n+1}(x,y,z) - P_n(x,y,z)) - \rho'_n(x,y,z)m'_n(x,y,z)F'_{zn}(x,y,z), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $Z_n(x,y,z)$  – положение срединной поверхности n водоносного горизонта;

$m'_n(x,y,z)$  – мощность разделяющего слоя,

$K_z(x,y,z)$  – коэффициент вертикальной фильтрации разделяющего слоя,

$Z'_n(x,y,z)$  – срединная поверхность слабопроницаемого слоя.

$F'_{zn}(x,y,z)$  – направляющий косинус, определяемый по формуле:

$$F'_{zn} = \left( 1 - \left( \frac{Z'_n(x+\Delta x,y,z) - Z'_n(x,y,z)}{2\Delta x} \right)^2 + \left( \frac{Z'_n(x,y+\Delta y,z) - Z'_n(x,y,z)}{2\Delta y} \right)^2 \right)^{1/2}$$

Ниже приводятся примеры моделирования процессов в многопластовой системе неоднородных подземных вод в зоне затруднённого водообмена для условий Пермского Предуралья.

### Особенности геологического строения. Расчетная схема модели

В структурно-тектоническом отношении моделируемая область находится в зоне сочленения восточной части Волго-Уральской антеклизы и Предуральского краевого прогиба. По действующей схеме гидрогеологического районирования Российской Федерации структур I порядка изучаемая территория относится к Восточно-Европейскому сложному артезианскому бассейну и Уральской сложной гидрогеологической складчатой области, в составе структур II порядка, соответственно, относится к Предуральскому предгорному артезианскому бассейну, граничащему с западной стороны с Западно-Уральским гидрогеологическим массивом.

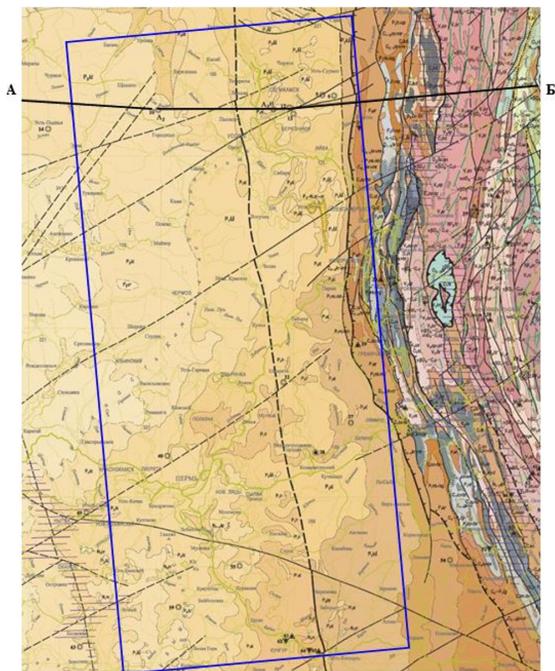
Структурно-тектонические условия и особенности геологического строения гидрогеологических структур I (II) порядка определяют сложные гидродинамические условия. Предуральский артезианский бассейн содержит порово-пластовые, трещинно-пластовые и трещинно-карстово-пластовые типы вод, заключенные в тектонически ненарушенных, пологозалегающих осадочных образованиях и включает в себя нижнепермский, средне-верхнекаменноугольный и нижне-среднекаменноугольный комплексы, а

также водоупорные и относительно водоносные нижне-средне-верхнедевонские карбонатно-терригенные комплексы.

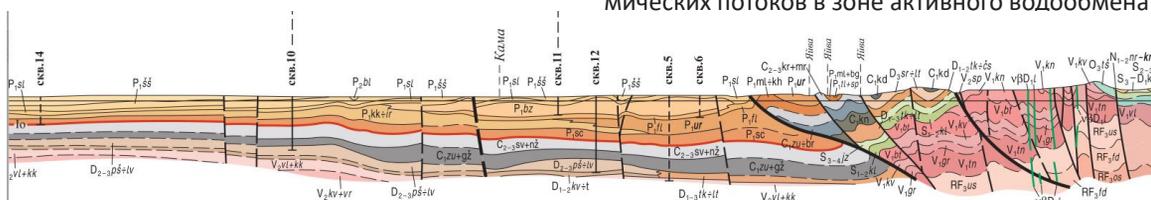
Для Западно-Уральского гидрогеологического массива характерно двухъярусное строение: водоносная зона девонско-нижнекаменноугольных терригенных, карбонатных и терригенно-карбонатных пород и водоносные зоны рифейско-нижнедевонских пород архейско-палеозойских гранитоидов основных и средних интрузий ультраосновных пород.

На **рис.1** приведена выкопировка из геологической карты дочетвертичных отложений с проекцией моделируемой территории, на **рис. 2** – геологический разрез (А-Б), проходящий в северной части области модели.

Моделируемая территория в вертикальном разрезе охватывает комплекс коренных отложений, включая нижнедевонскую карбонатно-терригенную толщу. В соответствии с современной «Картой гидрогеологического районирования территории Российской Федерации масштаба 1:2 500 000 и унифицированных схем объектов



**Рис. 1.**  
Выкопировка из геологической карты доплиценовых образований масштаба 1:1 000 000, лист О-40-Пермь. [6]



**Рис. 2.**  
Геологический разрез области модели.

гидрогеологической стратификации территории Российской Федерации (артезианских бассейнов)», утв. Протоколом Федерального агентства по недропользованию от 07.02.2012 № 18/83-пр.

Математическая модель включает следующие гидрогеологические подразделения (сверху-вниз):

- визей-башкирский водоносный горизонт **(C1-2v-b)**, представлен карбонатной толщей, сложенной известняками и доломитами с прослоями ангидритов, гипсов и глин;

- визейский водоупорный горизонт **(C1v)** представлен терригенной толщей: глинами, аргиллитами, алевролитами кварцевыми, в верхней части разреза преимущественно известковистыми;

- франско-турнейский водоносный горизонт **(D3f-C1t)** представлен преимущественно карбонатными отложениями: известняками глинистыми, битуминозными, реже, доломитами с прослоями глин, аргиллитами известковистыми с прослоями мергелей;

- франский водоупорный горизонт **(D3f)** представлен терригенной толщей: аргиллитами с прослоями известняков и алевролитов, в основании толщи залегают кварцевые песчаники;

- эмско-франский водоносный горизонт **(D1-3e-f)** представлен нерасчлененной карбонатно-терригенной толщей: песчаниками с прослоями глин, алевролитов, аргиллитов, известняками глинистыми, мергелями, известково-глинистыми сланцами.

Общее погружение моделируемых слоев Предуральского артезианского бассейна прослеживается в северо-западном направлении, к Западно-Уральскому гидрогеологическому массиву и наблюдается с абсолютных отметок от «-» 1200 м восточнее Кунгура до «-» 4600 м западнее Соликамска.

Воспроизведение состояния гидродинамического потока на территории реализовано на математической модели, созданной на основе системы математического и программного обеспечения «АкваСофт» [7].

Моделируемая территория, контур которой приведен на **рис. 1**, имеет размеры (260×530) км с шагом сетки 10 км. Шаг сетки выбран в соответствии с предположением малой величины скорости фильтрации жидкости в глубоких горизонтах по сравнению со скоростями гидродинамических потоков в зоне активного водообмена.

В вертикальном разрезе, согласно гидрогеологической стратификации, на модели воспроизводятся 5 слоев (горизонтов):

- три водоносных комплекса:

1. визей-башкирский водоносный горизонт **C1-2v-b** (первый водоносный горизонт),

2. франско-турнейский водоносный горизонт **D3f-C1t** (второй водоносный горизонт),

3. эмско-франский водоносный горизонт **D1-3e-f** (третий водоносный горизонт),

- два условно-разделяющих слоя:

4. визейский водоупорный горизонт **C1v** (первый разделяющий)

5. франский водоупорный горизонт **D3f** (второй разделяющий),

На основе предоставленной фактографической информации [8] был сформирован набор карт исходных параметров для каждого из 5 горизонтов в соответствии с формой уравнения (2), которые записывались в виде матриц значений каждого из параметров в базу данных модели:

- абсолютные отметки кровли горизонта (3 карты-матрицы),
- абсолютные отметки подошвы горизонта (3 карты-матрицы),
- проницаемость отложений водоносных горизонтов и разделяющих слоев (4 карты-матрицы),
- концентрация жидкости в водоносных горизонтах (2 карты-матрицы).

На основании фактических данных формировались следующие массивы информации, необходимые для реализации численного решения уравнения:

- массивы мощности водоносных горизонтов (3) и разделяющих слоев (2), как разность абсолютных отметок кровли и подошвы соответствующих горизонтов,
- массивы средней линии водоносных горизонтов (3),
- массивы температуры жидкости водоносных горизонтов (2),
- массивы кинематической вязкости водоносных горизонтов (2).

Результатами численного решения основного уравнения являются:

- карты давлений жидкости франско-турнейского и эмско-франского водоносных горизонтов (2),
- карты плотности жидкости водоносных и разделяющих слоев (4),
- карты векторов скоростей потока в водоносных горизонтах (2) и разделяющих слоях (2).

Верхний горизонт был исключен из расчетов и используется на модели только для задания граничных условий первого рода по всей поверхности. В качестве значений параметра граничных условий задается средняя линия,

пересчитанная в единицах давления. Граничные условия первого рода также задавались по внешним границам 2 и 3 слоя, параметры которых обусловлены глубиной залегания каждого моделируемого водоносного горизонта.

Причем, в отличие от моделей зоны активного водообмена, использование граничных условий 1 рода в расчетной схеме моделирования фильтрации неоднородных подземных вод в глубоких горизонтах не влияет на результаты решения задачи, поскольку параметры не являются искусственными границами, а отображают реально существующие физические условия процесса.

Вся описанная информация хранится в виде матриц в цифровой базе данных, для которой разработаны средства ввода и корректировки параметров в процессе решения задачи, который реализуется независимо от режима расчета. Визуализация исходных и результирующих данных возможна как с применением интерфейса системы, так и с помощью общепринятых ГИС-систем, поскольку информация для ввода и вывода готовится в текстовом формате. Исходные данные, результаты решения задачи привязаны к точным географическим координатам. Расчеты осуществляются в относительных координатах (i,j,n).

Диапазоны величины параметров выделенных комплексов моделируемой территории приведены в **таблице 1**.

Значения параметров автоматически преобразовываются в расчетных модулях к системе единиц измерения СИ.

На **рисунке 3** приводятся примеры исходных данных по проницаемости второго водоносного горизонта (**3-А**) и первого разделяющего слоя (**3-Б**), сформированных в узловых точках сеточной области.

Все данные, необходимые для численного решения уравнения (2) и последующего вычисления скоростей по формулам (3), располагаются в цифровой базе данных системы моделей исследуемого процесса таким образом, что, взаимно дополняя друг друга, позволяют исследовать реальный объект с той или иной степенью точности, рассматривая следующие процессы:

- стационарная или нестационарная фильтрация однородной жидкости (решение задачи в напорах),
- стационарная фильтрация неоднородной жидкости (решение задачи в давлениях, карты матриц векторов скоростей в плане и по вертикали),
- конвективного массопереноса (расчет распространения фронта контура загрязнения заданной концентрации с учетом результатов решения обоих типов задач фильтрации).

Описанные возможности реализованы в вычислительной подсистеме универсальных моду-

Таблица 1.

Параметры глубоких горизонтов модели Пермского Предуралья

Наименование параметров	Геологический возраст пород				
	C <sub>1-2</sub> v-b	C <sub>1</sub> v	D <sub>3</sub> f-C <sub>1</sub> t	D <sub>3</sub> f	D <sub>1-3</sub> e-f
	водоносный	разделяющий	водоносный	разделяющий	водоносный
	Исходные данные				
Отметки кровли (м)			-(1000÷3800)		-(1400÷4400)
Отметки подошвы (м)	-(800÷3000)		-(1000÷4000)		-(1100÷4600)
Проницаемость (дарси)		0.0001÷0.8	0.008÷5.5	0.0001÷1.18	0.0001÷3
Минерализация (г/л)			100÷250		100÷275
Динамическая вязкость (Па·с)		0.001÷0.0024	0.0012÷0.002	0.001÷0.0019	0.0008÷0.002
	Сформированные массивы				
Мощность (м)	50	100÷700	10÷250	200÷800	10÷210
Температура (град)			15÷53		25÷65
	Результирующие массивы				
Давление (атм)			100-375		150-520
Плотность (г/дм <sup>3</sup> )		1.1 ÷1.3	1.15 ÷1.3	1.1 ÷1.4	1.2 ÷1.4
Скорости, плановые и вертикальные, (м/сут)		0.0÷0.5	0.0÷0.06	0.0÷0.88	0.0÷0.12

лей, взаимосвязанных по информации и управлению посредством цифровой базы сеточных данных с прямым доступом к каждому из параметров в процессе решения задачи.

Функциональность алгоритма расчета оценивалась для следующих типов процесса геофильтрации с использованием параметров данного объекта:

1. расчет пластовых давлений неоднородной жидкости,
2. фильтрация неоднородной жидкости,
3. фильтрация жидкости с постоянной плотностью пресной жидкости и переменной вязкостью,
4. фильтрация жидкости с постоянной вязкостью пресной жидкости и переменной плотностью.

Далее приводится сравнение моделей для первой и второй расчетных схем постановки задачи.

### Анализ результатов моделирования территории Пермского Предуралья

#### Модель состояния неоднородных подземных вод в глубоких горизонтах.

Оценка адекватности модели процесса фильтрации в глубоких водоносных горизонтах для нефтеносных бассейнов затруднена отсутствием фактических данных, полученных по результатам ведения мониторинга подземных вод, что ограничивает создание адекватных моделей этих территорий. Имеющийся набор карт в силу используемого масштаба не позволяет создавать пакет данных, необходимых для создания

модели. Однако сопоставление данных, полученных по результатам моделирования демонстрирует увеличение информационной емкости территории за счет используемой методики и тем самым позволяет визуализировать реальные процессы.

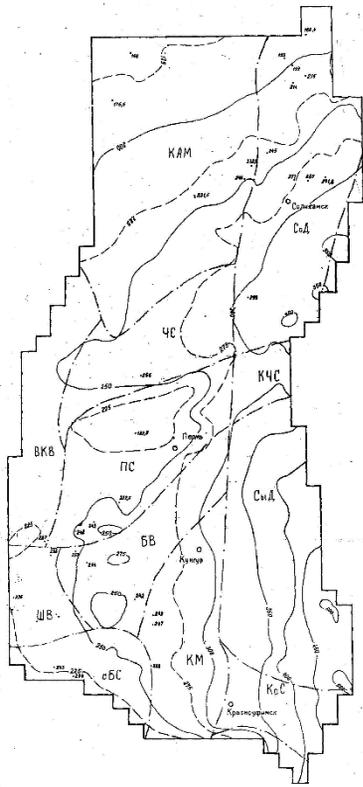
На рис. 4-5 приводится сравнение исходных (А) и модельных (Б) данных по распределению давлений во франско-турнейском (второй водоносный слой в модели) и визей-башкирском (третий водоносный слой в модели) водоносных горизонтах.

На результирующие модельные карты (рис. 4-Б и 5-Б) вынесены точки фактически замеренных давлений в наблюдательных скважинах (.232), которые отмечены на исходных картах.

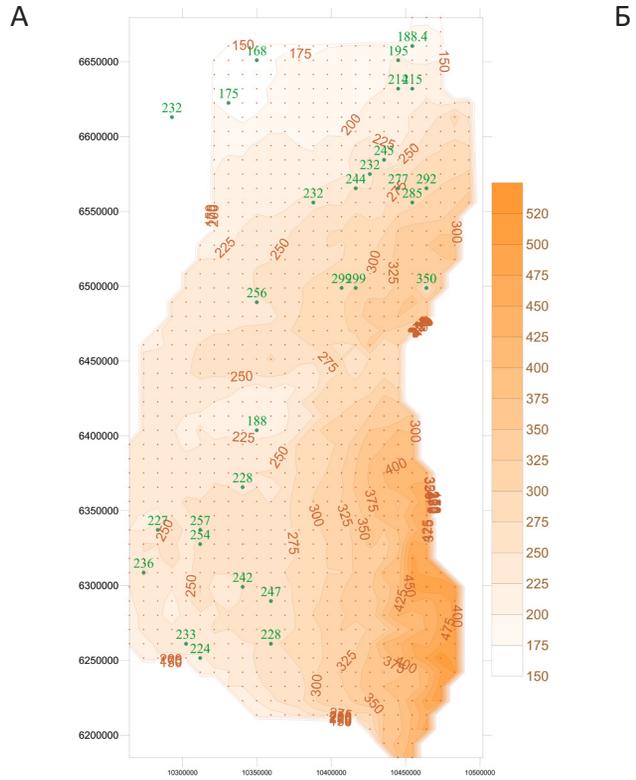
На картах фактов (рис. 3-А и 4-А) отмечены следующие тектонические структуры, определяющие особенности геологического строения глубоких горизонтов: КАМ – Камская моноклинал, СоД – Соликамская депрессия, СыД – Силвенская депрессия, ЧС – Чермозская седловина, КЧС – Кочинско-Чусовская седловина, ВКВ – Верхне-Камская впадина, ПС – Пермский свод, БА – Бабкинская впадина, ШВ – Шалымская впадина, КМ – Кунгурская моноклинал, КрС – Красноуфимская седловина, ЮАД – Юрзано-Айская депрессия, СБС – северный склон Башкирского свода.

Сопоставление модельных (рис. 4-Б и 5-Б) и фактических давлений, поля распределения которых отображены изолиниями на рисунках





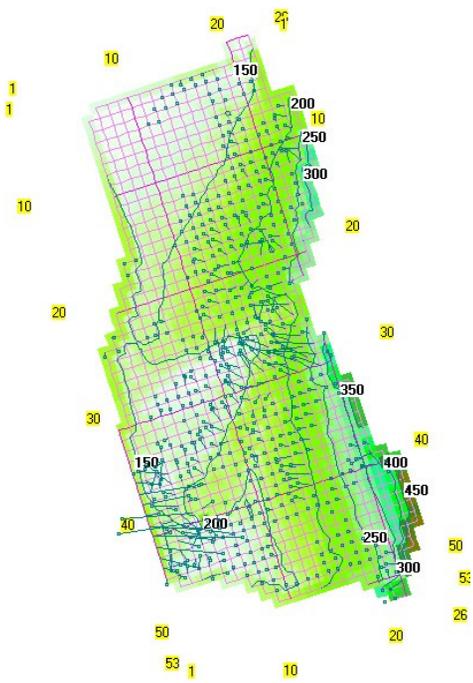
(А) Фактические данные



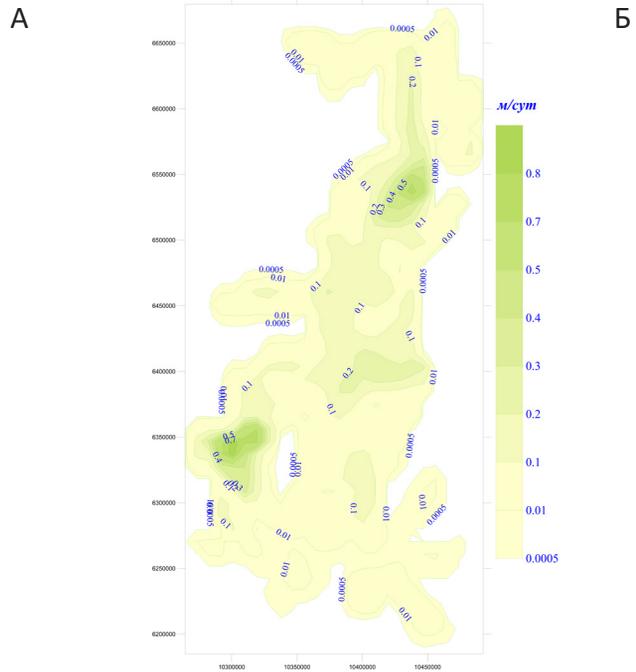
(Б) Модельные данные

Рис. 5.

Сравнение исходных и результирующих давлений для франко-турнейского водоносного горизонта



(А) D1-3e-f – третий водоносный горизонт



(Б) D3f – второй разделяющий слой

Рис. 6.

Плановые и вертикальные скорости течения неоднородной жидкости

4-А и 5-А, адекватно коррелируются с данными замеров этих значений в конкретных скважинах. Результаты моделирования отображают существующие особенности геологического строения (рис. 1) территории, а именно погружение водоносных горизонтов в направлении к восточной границе модели, т.е. по направлению к Западно-Уральскому гидрогеологическому массиву.

Таким образом, можно сделать вывод о приемлемом качестве алгоритма численного решения уравнения (2).

На рисунке 6-А приводятся модельные значения плановых скоростей фильтрации (м/сут), рассчитанные по формулам (3), совмещенные с изолиниями давлений, а на рисунке 6-Б – вертикальные скорости. Сопоставление исходных массивов и полученных на модели решений, показывает, что распределение вертикальных скоростей в разделяющих слоях по площади модели коррелирует с массивами вертикальной проницаемости (рис. 3), при этом, максимальная величина вертикальной скорости более чем в десять раз превышает величину плановой скорости. Направление вертикальной скорости – восходящее по всему разделяющему слою.

### Модель стационарной фильтрации неоднородных подземных вод

Одним из результатов моделирования состояния неоднородной жидкости в глубоких горизонтах является расчет плотности жидкости в водоносных горизонтах и разделяющих слоях,

которая определяется в зависимости от искомой функции давления согласно формулам (4).

По значениям параметров плотности  $\rho$ , проницаемости  $k_{пр}$  и динамической вязкости  $\eta$  можно рассчитать коэффициенты плановой и вертикальной фильтрации в каждой узловой точке сеточной модели по классической формуле:  $Kf=(k_{пр} \times \rho)/\eta$ , далее определяются значения параметров водопроницаемости  $T=Kf \times M$ , где  $M$  – мощность водоносного горизонта. По этим данным создается модель фильтрации неоднородной жидкости в напорной постановке задачи. Необходимым условием адекватности модели реальному процессу является замена граничных условий первого рода, которые задаются по внешним границам модели, на граничные условия третьего рода по тем же границам. Таким образом, результаты моделирования в такой постановке увеличивают информационную емкость описания реального объекта. Более подробное описание возможностей системы математического и программного обеспечения «Аквасофт» приводится в статье [9].

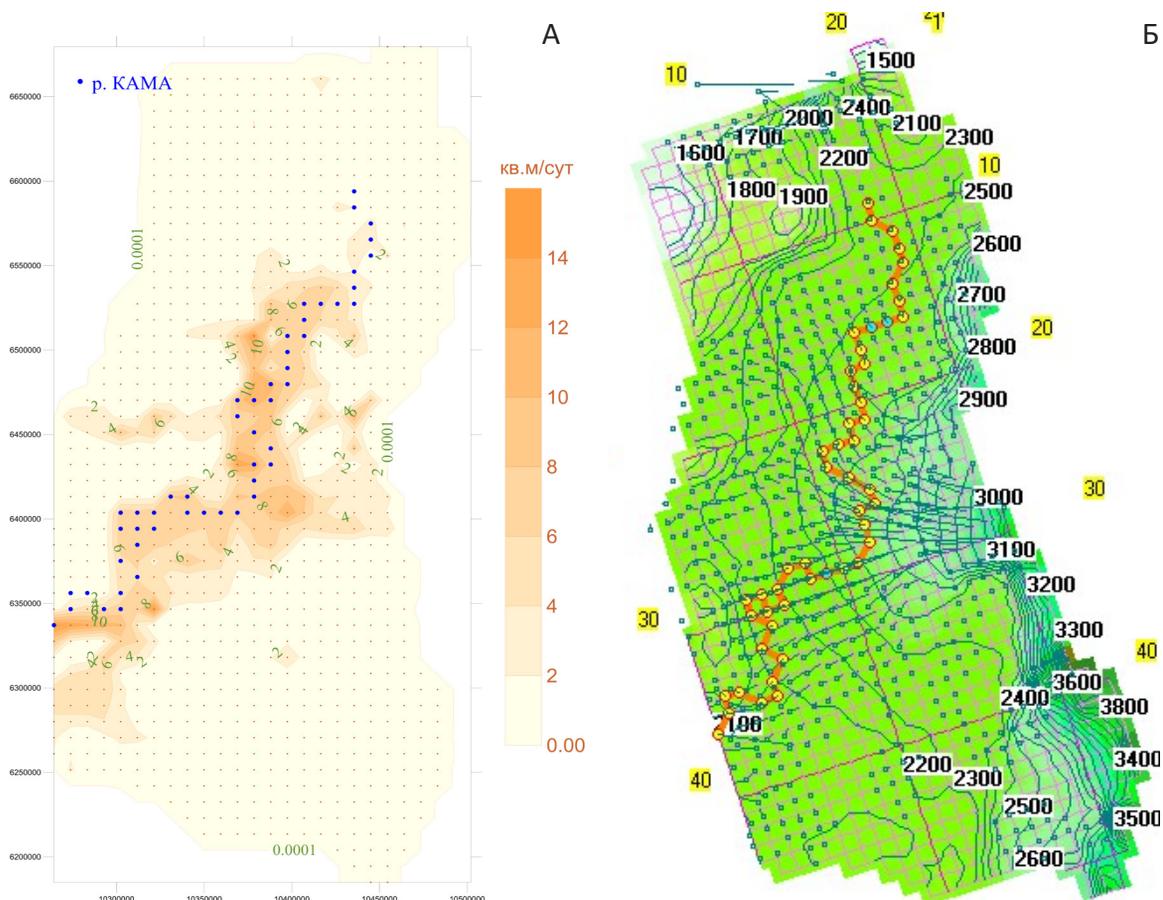
Состав и диапазон величины исходных и результирующих данных для задачи фильтрации в классической постановке, приводятся в таблице 2.

При воспроизведении условий геофильтрации в зоне активного водообмена на модели задается сеть поверхностных вод в виде граничных условий третьего рода по данным абсолютных отметок уровней и коэффициентов взаимосвязи

Таблица 2.

Параметры модели стационарной фильтрации неоднородной жидкости

Наименование параметров	Геологический возраст пород				
	C <sub>1-2</sub> v-b	C <sub>1</sub> v	D <sub>3</sub> f-C <sub>1</sub> t	D <sub>3</sub> f	D <sub>1-3</sub> e-f
	водоносный	разделяющий	водоносный	разделяющий	водоносный
	Сформированные массивы				
Коэффициент плановой фильтрации (м/сут)			0÷0.115		0÷0.17
Коэффициент вертикальной фильтрации (м/сут)			0÷0.055		0÷0.09
Водопроницаемость (м <sup>2</sup> /сут)			0÷8.8		0÷14,8
	Результирующие массивы				
Абсолютные отметки уровней подз. вод (м)			1200÷3400		1200÷3600
Плановые потоки (м <sup>3</sup> /сут)			0-960		0-620
	Вертикальные потоки – водообмен между 2 и 3 водоносными горизонтами (м <sup>3</sup> /сут)				
Приток из третьего горизонта			0÷250		
Отток в третий слой					0-5



(А) Карта водопроницаемости

(Б) Гидроизогипсы и латеральные потоки

**Рис. 7.**  
Результаты моделирования процесса фильтрации D1-3e-f

подземных и поверхностных вод. В данном варианте модели зона активного водообмена в силу отсутствия данных не рассматривается. Однако, карта водопроницаемости третьего водоносного горизонта D1-3e-f (рис 7-А) явно отображает повышенные значения в долине реки Кама, даже на глубине порядка 3000м. Для второго горизонта и разделяющих слоев эта тенденция также прослеживается. На картах (рис.7) задано расположение узловых точек, соответствующих руслу реки Кама, но река, как атрибут модели, не рассматривается.

Результирующая карта абсолютных отметок уровней подземных вод этого горизонта приводится на рис. (7-Б). Карта напоров совмещена с картой плановых фильтрационных потоков – их направлением и величиной.

На изолиниях отмечены модельные отметки уровней подземных вод, стрелками показано направление и величина потоков. Величина потока рассчитывается для каждого блока сеточной области размером 100 км², диапазоны величины потоков (м³/сут) приведены в таблице 2. Также результатами моделирования являются карты вертикального водообмена между горизонтами.

Сопоставление результатов моделирования для разных условий постановки задачи обеспечивает возможность исследования процесса с разной степенью точности. Решение задачи «в давлениях» провозглашает более детально отобразить состояние неоднородных подземных вод в зависимости от существующих условий, тогда как решение задачи «в напорах» предоставляет общепринятую гидрогеологическую информацию.

В частности, полученные результаты подтверждают наличие областей повышенной проницаемости под долинами рек на значительной глубине по всему вертикальному геологическому разрезу. Этот вывод выявляет особую опасность методики гидроразрыва пластов, в результате применения которой нарушается сложившееся геологическое строение, формирующее сеть поверхностных вод. В результате уничтожаются зоны восходящей фильтрации, обеспечивающие выход подземных вод на поверхность в виде рек, родников, болот и т.д., что приводит к сокращению поверхностного стока и угнетению растительности.

## Выводы

Создана многофункциональная математическая модель планово-вертикальной фильтрации подземных вод, отражающая геолого-гидрогеологические условия, строение и характеристики глубоких горизонтов, приуроченных к девон-нижнекаменноугольным карбонатно-терригенным отложениям Пермского Предуралья;

Разработан инструмент изучения гидродинамических процессов движения и взаимодействия подземных вод зоны затрудненного водообмена, кровля водовмещающих пород, которых залегают на значительных глубинах с абсолютными отметками «минус» 800÷4600 м;

Рассчитаны количественные значения следующих показателей: давления, плотности и векторов скоростей потока для каждого из водоносных горизонтов, исходя из неоднородных условий рас-

пределения температуры и кинематической вязкости пласта по площади моделируемой области;

Определены характеристики интенсивности вертикальных перетоков между водоносными горизонтами, разделенными слабопроницаемыми отложениями невыдержанной в плане мощностью от 100 до 800 м, включая направление и скорость потока.

Полученные результаты показывают большие возможности применяемого подхода, как теоретической основы изучения динамики подземных вод глубоких горизонтов нефтегазоносных бассейнов, особенностью которого является детальное воспроизведение на математических моделях реально существующей структуры изучаемой части разреза бассейна, геофильтрационных параметров и свойств жидкости каждого из рассматриваемых на модели слоев. **XXI**

## Литература

1. Карцев А.А. Гидрогеология нефтяных и газовых месторождений. Москва, «Недра», 1972, 280 стр.
2. Корценштейн В.Н. Методика гидрогеологических исследований нефтегазоносных районов. Москва, «Недра», 1976, 185 стр.
3. Крашин И.И. Моделирование фильтрации и теплообмена в водонапорных системах. Москва, «Недра», 1976, 158 стр.
4. Полшкова И.Н. «Особенности реализации системы специального математического обеспечения автоматизированных сеточных моделей бассейнов и месторождений подземных вод». Диссертация на соискание степени кандидата технических наук по специальности «гидрогеология», Москва, ВСЕГИНГЕО, 1994
5. Бондаренко С.С., Вартанян Г.С. Методы изучения и оценки ресурсов глубоких подземных вод. Москва, «Недра», 1986, 478 стр.
6. Официальный сайт ВСЕГИИ vsegei@vsegei.ru
7. Система специального программного обеспечения расчета процессов фильтрации и массопереноса в подземных водах – «Аквасофт» – «Aquasoft». Свидетельство регистрации программы – №2006610658 от 17.02.2006.
8. Богатырева О.А. Изучение скоростей латеральной фильтрации артезианских вод комплексов карбонатных отложений палеозоя Пермского Прикамья. // Сб. «Доклады геологической секции XIX научно-технической конференции, ППИ, Пермь, 1981, стр. 75-85.
9. Полшкова И.Н. Постоянно действующие гидродинамические модели, как подсистема цифрового геологического мониторинга. // Недропользование XXI век. – 2022. – № 2. – с.86-97.

UDC 556.072 : 556.38

**I.N. Polshkova**, Doctor Science Engineering, Assistant Professor: Department of hydrogeology MGOU, the combination Department of hydrogeology of the Russian State Geological Prospecting Institute, Senior researcher, Institute of water problems RAS, z\_irpol1@mail.ru  
**R.Z. Akhmetshin**, Research Associate of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, axmetro@yandex.ru  
**T.N. Saevets**, Sredne-Volzhsky territorial department of FGKU «Rosgeoexpertiza», tatianasaevets@yandex.ru

## STATIONARY FILTRATION MATHEMATICAL MODEL OF AN INHOMOGENEOUS LIQUID ON THE PERM-URAL OIL-BEARING BASIN EXAMPLE

**Abstract:** The main difficulty in creating a filtration model of inhomogeneous liquid is associated with a complex type of the basic equation describing this process. It is necessary to take into account not only the properties of the liquid but also the depth of existing taking into account the shape of the simulated horizons surfaces. This problem formulation makes it possible to reproduce the non-potential nature of the flow, and the visualizing process as a result of modeling gives not only the seeking pressure function, and also the lateral and vertical velocities, including their direction and magnitude. The modeling pressures are compared with the filtration problem solution in the classical formulation. Mathematical filtration models of inhomogeneous liquids based on the software «Aquasoft» allow you to use wide opportunities for mathematical experimenting and significantly increases the information capacity necessary for real processes studying compared to the generally accepted practice of building geological maps.

**Keywords:** filtration mathematical models, inhomogeneous liquid, deep horizons.